



## FICHA DE TRABALHO N.º 1 – MATEMÁTICA A – 10.º ANO

### INTRODUÇÃO À LÓGICA BIVALENTE

#### PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."

Galileu Galilei

#### GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

**1.** Se as proposições  $p$  e  $q$  têm o mesmo valor lógico, então ou são ambas verdadeiras ou são ambas falsas. Assim:

- a proposição  $p \Leftrightarrow q$  é sempre **verdadeira**, pois a equivalência entre duas proposições é falsa se e somente se as proposições tiverem valores lógicos diferentes.
- a proposição  $p \Rightarrow q$  é sempre **verdadeira**, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.
- a proposição  $p \vee \sim q$  é sempre **verdadeira**, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas. Logo, se as proposições  $p$  e  $q$  forem verdadeiras, então a proposição  $p \vee \sim q$  é verdadeira, visto que a proposição  $p$  é verdadeira. Se as proposições  $p$  e  $q$  forem falsas, então a proposição  $\sim q$  é verdadeira e portanto a proposição  $p \vee \sim q$  é verdadeira, visto que a proposição  $\sim q$  é verdadeira.
- a proposição  $p \wedge \sim q$  é sempre **falsa**, pois a conjunção entre duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, se as proposições  $p$  e  $q$  forem verdadeiras, então a proposição  $\sim q$  é falsa e portanto a proposição  $p \wedge \sim q$  é falsa, visto que a proposição  $\sim q$  é falsa. Se as proposições  $p$  e  $q$  forem falsas, então a proposição  $p \wedge \sim q$  é falsa, visto que a proposição  $p$  é falsa.

Resposta: **D**

**2.** Tem-se que a proposição  $p \Leftrightarrow q$  é verdadeira. Portanto as proposições  $p$  e  $q$  têm o mesmo valor lógico.

Como a proposição  $\sim p \vee r$  é falsa, as proposições  $\sim p$  e  $r$  são ambas falsas, pois a disjunção entre duas condições é falsa se e somente se ambas forem falsas. Assim, como a proposição  $\sim p$  é falsa, a proposição  $p$  é verdadeira e consequentemente, a proposição  $q$  também é verdadeira, pois as proposições  $p$  e  $q$  têm o mesmo valor lógico.

Logo, é verdade que a Maria tem uma licenciatura em Matemática e que tem um mestrado em Física, mas é falso que seja professora de Matemática.

Analizando as opções:

- A** Se a Maria é licenciada em Matemática e tem um mestrado em Física então é professora de Matemática.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por  $p \wedge q \Rightarrow r$ . Tem-se que a proposição  $p \wedge q$  é verdadeira, pois as proposições  $p$  e  $q$  são verdadeiras e a proposição  $r$  é falsa. Logo a proposição  $p \wedge q \Rightarrow r$  é **falsa** pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

- B** A Maria tem uma licenciatura em Matemática e não tem um mestrado em Física.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por  $p \wedge \sim q$ . A proposição  $\sim q$  é falsa, visto que a proposição  $q$  é verdadeira. Logo, a proposição  $p \wedge \sim q$  é **falsa**, pois a conjunção entre duas proposições só é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras.

**C** A Maria é licenciada em Matemática se for professora de Matemática.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por  $r \Rightarrow p$ . Como a proposição  $r$  é falsa e a proposição  $p$  é verdadeira, a proposição  $r \Rightarrow p$  é **verdadeira**, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

**D** A Maria não tem um mestrado em Física ou é professora de Matemática.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por  $\sim q \vee r$ . A proposição  $\sim q$  é falsa visto que a proposição  $q$  é verdadeira. Como a proposição  $r$  também é falsa, a proposição  $\sim q \vee r$  é falsa,  $p$  é verdadeira, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por  $p \wedge q \Rightarrow r$ . Tem-se que a proposição  $p \wedge q$  é verdadeira, pois as proposições  $p$  e  $q$  são verdadeiras e a proposição  $r$  é falsa. Logo a proposição  $p \wedge q \Rightarrow r$  é **falsa** pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

Resposta: **C**

**3.** Tem-se que:

- a proposição  $p \Rightarrow q \vee \sim r$  é falsa. Portanto a proposição  $p$  é verdadeira e a proposição  $q \vee \sim r$  é falsa, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.
- a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas. Portanto, como a proposição  $q \vee \sim r$  é falsa, a proposição  $p$  é falsa e a proposição  $\sim r$  também é falsa. Consequentemente, a proposição  $r$  é verdadeira.

∴ A proposição  $p$  é verdadeira, a proposição  $q$  é falsa e a proposição  $r$  é verdadeira.

Resposta: **B**

**4.** Tem-se que:

$$(((p \vee p) \wedge \sim q) \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \Rightarrow q) \stackrel{i)}{\Leftrightarrow} \sim(p \wedge \sim q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim(\sim q)) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee q \stackrel{ii)}{\Leftrightarrow} \sim p \vee (q \vee q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

Logo, a negação da proposição  $((p \vee p) \wedge \sim q) \Rightarrow q$  é equivalente a:

$$\sim(((p \vee p) \wedge \sim q) \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

i) **Idempotência:** Se  $p$  é uma proposição então  $p \vee p \Leftrightarrow p$  e  $p \wedge p \Leftrightarrow p$ .

ii) **Propriedade associativa da disjunção.**

Resposta: **A**

**5.**

**1.º Processo:**

Se a proposição  $p$  for verdadeira, então  $q \Rightarrow p$  é uma proposição verdadeira, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Logo a proposição  $p \wedge (q \Rightarrow p)$  é verdadeira e portanto tem o mesmo valor lógico que a proposição  $p$ .

Se a proposição  $p$  for falsa, então a proposição  $p \wedge (q \Rightarrow p)$  também é falsa, pois a conjunção entre duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, a proposição  $p \wedge (q \Rightarrow p)$  é o mesmo valor lógico que a proposição  $p$ .

Assim, para quaisquer que sejam as proposições  $p$  e  $q$ , a proposição  $p \wedge (q \Rightarrow p)$  tem sempre o mesmo valor lógico que a proposição  $p$ . Logo,  $p \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$ .

## 2.º Processo: Tabela de Verdade

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$q \Rightarrow p$	$p \wedge (q \Rightarrow p)$
$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$

Logo,  $p \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$ .

## 3.º Processo:

Tem-se que,  $p \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \vee p) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \vee p) \stackrel{i}{\Leftrightarrow} (p \vee F) \wedge (\sim q \vee p) \stackrel{ii}{\Leftrightarrow} p \vee (F \wedge \sim q) \stackrel{i}{\Leftrightarrow} p \vee F \stackrel{i}{\Leftrightarrow} p$ .

i) Se  $p$  é uma proposição e  $F$  é uma qualquer proposição falsa então  $p \vee F \Leftrightarrow p$  (existência de elemento neutro da disjunção) e  $p \wedge F \Leftrightarrow F$  (existência de elemento absorvente da disjunção).

ii) Propriedade distributiva da disjunção em relação à conjunção.

Resposta: A

6. Como a proposição  $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$  é verdadeira, as proposições  $p \Rightarrow q$ ,  $p \vee \sim r$  e  $\sim q$  são verdadeiras. Assim:

- se a proposição  $\sim q$  é verdadeira, então a proposição  $q$  é falsa.
  - se a proposição  $q$  é falsa e a proposição  $p \Rightarrow q$  é verdadeira, então a proposição  $p$  é necessariamente falsa, pois a implicação de duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.
  - se a proposição  $p$  é falsa e a proposição  $p \vee \sim r$  é verdadeira, então a proposição  $\sim r$  é necessariamente verdadeira, pois a disjunção de duas proposições é falsa se e somente se ambas fossem falsas. Logo, se a proposição  $\sim r$  é verdadeira, então a proposição  $r$  é falsa.
- ∴ A proposição  $p$  é falsa, a proposição  $q$  é falsa e a proposição  $r$  é falsa.

Resposta: D

7. Como a proposição  $(\sim a \wedge (b \Rightarrow c)) \vee a$  é falsa, as proposições  $\sim a \wedge (b \Rightarrow c)$  e  $a$  são falsas. Assim, se a proposição  $a$  é falsa, então a proposição  $\sim a$  é verdadeira. Logo, como a proposição  $\sim a \wedge (b \Rightarrow c)$  é falsa, a proposição  $b \Rightarrow c$  tem de ser necessariamente falsa. Portanto, como a implicação é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa, vem que a proposição  $b$  é verdadeira e a proposição  $c$  é falsa.

∴ A proposição  $a$  é falsa, a proposição  $b$  é verdadeira e a proposição  $c$  é falsa. Logo, a Joana tem um gato de cor preta.

Resposta: C

8. Recorrendo a uma tabela de verdade verifica-se que a única proposição que não é uma tautologia é a da opção **C**:

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$\underbrace{p \wedge q \Rightarrow r}_a$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$\underbrace{(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)}_b$	$a \Rightarrow b$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$

Logo, a proposição  $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$  não é uma tautologia.

Usando tabelas de verdade verificar-se-ia que as proposições das restantes opções são tautologias. O mesmo também pode ser feito usando as propriedades das operações lógicas. Seja  $V$  uma qualquer proposição verdadeira:

$$\begin{aligned}
 \boxed{A} \quad & ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (\sim p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\sim (\sim p) \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow V
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{B} \quad & ((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow ((\sim p \vee \sim p) \vee (q \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\sim p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow (\sim (\sim p) \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow V
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{D} \quad & (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (r \vee (\sim p \wedge \sim q)) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim (p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim (\sim (p \vee q)) \Rightarrow r) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow V
 \end{aligned}$$

i) Como o antecedente e o consequente são a mesma proposição, a implicação é sempre verdadeira.

Resposta: **C**

9. A resposta correcta é a B. Fazendo uma tabela de verdade, vem:

$p$	$q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Fazendo uma tabela de verdade para cada uma das restantes proposições, verificar-se-ia que nenhuma dessas tabelas é igual à dada.

Resposta: B

10. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 (p \Leftrightarrow p \vee q) &\Leftrightarrow (p \Rightarrow p \vee q) \wedge (p \vee q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \vee (p \vee q)) \wedge (\sim (p \vee q) \vee p) \Leftrightarrow ((\sim p \vee p) \vee q) \wedge ((\sim p \wedge \sim q) \vee p) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (V \vee q) \wedge (p \vee (\sim p \wedge \sim q)) \Leftrightarrow V \wedge ((p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)) \Leftrightarrow V \wedge (p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)
 \end{aligned}$$

Resposta: D

## GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

11.

11.1. A proposição pode ser reescrita da seguinte forma:

“O José ainda não fez uma viagem aos Estados Unidos **e se** já fez uma viagem à Tailândia, **então**, também já fez uma viagem à China.”

Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica:  $\sim q \wedge (r \Rightarrow p)$ .

11.2. Sabe-se que a proposição  $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \vee r)$  é falsa. Logo, como a implicação é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa, vem que  $\sim p \wedge q$  é verdadeira e que  $\sim (p \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim r$  é falsa. Assim:

- se a proposição  $\sim p \wedge q$  é verdadeira, então as proposições  $\sim p$  e  $q$  são verdadeiras, pois a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, a proposição  $p$  é falsa.
- como a  $\sim p \wedge \sim r$  é falsa e a proposição  $\sim p$  é verdadeira, a proposição  $\sim r$  é falsa, pois a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, a proposição  $r$  é verdadeira.

∴ A proposição  $p$  é falsa, a proposição  $q$  é verdadeira e a proposição  $r$  é verdadeira. Portanto, o José já esteve nos Estados Unidos e na Tailândia mas não esteve na China.

11.3. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 ((\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \vee r)) &\Leftrightarrow (\sim (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim r)) \Leftrightarrow (p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim r) \Leftrightarrow \sim q \vee (p \vee (\sim p \wedge \sim r)) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sim q \vee ((p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim r)) \Leftrightarrow \sim q \vee (V \wedge (p \vee \sim r)) \Leftrightarrow \sim q \vee (p \vee \sim r) \Leftrightarrow p \vee \sim q \vee \sim r
 \end{aligned}$$

12.

12.1. Tem-se:

$$(\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (\sim(\sim p) \vee \sim(\sim p \vee q)) \Leftrightarrow p \vee (p \wedge \sim q) \stackrel{\text{d}}{\Leftrightarrow} (p \wedge V) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p \wedge (V \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge V \Leftrightarrow p$$

i) Se  $p$  é uma proposição e  $V$  é uma qualquer proposição verdadeira então  $p \wedge V \Leftrightarrow p$  (existência de elemento neutro da conjunção) e  $p \vee V \Leftrightarrow V$  (existência de elemento absorvente da conjunção).

12.2.

$p$	$q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$
$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$

Logo,  $(\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow p$ .

13.

13.1.

$p$	$q$	$r$	$\sim q$	$\sim q \vee r$	$p \wedge (\sim q \vee r)$
$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$

13.2. Sabe-se que a proposição  $p \wedge (\sim q \vee r)$  é verdadeira. Logo, como a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas as proposições forem verdadeiras, vem que a proposição  $p$  é verdadeira e a proposição  $\sim q \vee r$  também é verdadeira. Assim:

- se a proposição  $p$  é verdadeira, então a proposição  $r \Rightarrow p$  é verdadeira, pois a implicação é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.
- tem-se que como  $\sim(\sim q \vee r) \Leftrightarrow q \wedge \sim r \Leftrightarrow \sim r \wedge q$ , ou seja, a proposição  $\sim r \wedge q$  é a negação da proposição  $\sim q \vee r$ . Portanto, como a proposição  $\sim q \vee r$  é verdadeira, a proposição  $\sim r \wedge q$  é falsa.

Logo, a proposição  $(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim r \wedge q)$  é falsa, pois a equivalência de duas proposições é falsa se e somente se as duas proposições tiverem valores lógicos diferentes.

## 14.

**14.1.** A proposição  $X \Rightarrow Y$  pode ser traduzida em linguagem corrente como: **se  $X$  então  $Y$** . A proposição  $X \Leftrightarrow Y$  pode ser traduzida em linguagem corrente como:  **$X$  se e somente se  $Y$** . Assim, a proposição  $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \sim r)$  pode ser traduzida para linguagem corrente da seguinte forma:

“Se o José passou as suas férias no Algarve, então, foi à Praia da Rocha se e somente se não foi à Praia da Ilha de Tavira.”

**14.2** A proposição pode ser reescrita da seguinte forma:

“**Se** o José passou férias no Algarve, **então**, foi à Praia da Rocha **e** foi à Praia da Ilha de Tavira.”

Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica:  $p \Rightarrow q \wedge r$ .

## 15.

**15.1.** Tem-se,  $(p \vee (p \wedge q)) \Rightarrow p \Leftrightarrow ((p \wedge V) \vee (p \wedge q)) \Rightarrow p \Leftrightarrow (p \wedge (V \vee q)) \Rightarrow p \Leftrightarrow (p \wedge V) \Rightarrow p \Leftrightarrow (p \Rightarrow p) \Leftrightarrow \sim p \vee p \Leftrightarrow V$

i) Se  $p$  é uma proposição e  $V$  é uma qualquer proposição verdadeira então  $p \wedge V \Leftrightarrow p$  (existência de elemento neutro da conjunção)

**15.2.** Tem-se:

$$\begin{aligned} \sim(\sim p \wedge (p \vee q)) \wedge (p \vee q) &\Leftrightarrow \sim((\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (F \vee (\sim p \wedge q)) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim q \wedge q) \Leftrightarrow p \vee F \Leftrightarrow p \end{aligned}$$

**15.3.** Tem-se:

$$\begin{aligned} p \Rightarrow (p \Rightarrow p \wedge q) &\Leftrightarrow p \Rightarrow (\sim p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p \Rightarrow ((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q)) \Leftrightarrow p \Rightarrow (V \wedge (\sim p \vee q)) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee q \Leftrightarrow \sim p \vee q \end{aligned}$$

**15.4.** Tem-se:

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow (p \wedge \sim q)) \wedge (\sim p \vee q) &\Leftrightarrow (\sim p \vee (p \wedge \sim q)) \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (V \wedge (\sim p \vee \sim q)) \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sim p \vee F \Leftrightarrow \sim p \end{aligned}$$

**15.5.** Tem-se:

$$\begin{aligned} \sim((p \Rightarrow \sim q) \vee (p \wedge q)) &\Leftrightarrow \sim((\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q))) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee ((\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q))) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee ((\sim q \vee p) \wedge V)) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee (\sim q \vee p)) \Leftrightarrow \sim((\sim p \vee p) \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(V \vee \sim q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sim V \Leftrightarrow F \end{aligned}$$

**15.6.** Tem-se:

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) &\Leftrightarrow (q \wedge (p \vee \sim p)) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (q \wedge V) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow q \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge V \Leftrightarrow q \vee p \Leftrightarrow p \vee q
 \end{aligned}$$

**15.7.** Tem-se:

$$\begin{aligned}
 q \Rightarrow (\sim (p \Rightarrow \sim q) \wedge q) &\Leftrightarrow \sim q \vee (\sim (\sim p \vee \sim q) \wedge q) \Leftrightarrow \sim q \vee ((p \wedge q) \wedge q) \Leftrightarrow \sim q \vee (p \wedge (q \wedge q)) \Leftrightarrow \sim q \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q) \Leftrightarrow (\sim q \vee p) \wedge V \Leftrightarrow \sim q \vee p \Leftrightarrow p \vee \sim q
 \end{aligned}$$

**15.8.** Tem-se:

$$\begin{aligned}
 (p \wedge \sim (p \wedge q)) \Rightarrow \sim p \vee q &\Leftrightarrow (p \wedge (\sim p \vee \sim q)) \Rightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow ((p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)) \Rightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow (F \vee (p \wedge \sim q)) \Rightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \vee q
 \end{aligned}$$

**16.**

**16.1.**

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$q \wedge (p \vee \sim q)$	$\sim p \vee q$	$(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q)$
$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$

Logo,  $(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow V$ , sendo  $V$  uma qualquer proposição verdadeira. Portanto, para quaisquer que sejam as proposições  $p$  e  $q$ ,  $(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q)$  é sempre verdadeira, ou seja, é uma tautologia.

**16.2.** Tem-se:

$$\begin{aligned}
 (q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q) &\Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (q \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \vee F \Rightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \Rightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sim (q \wedge p) \vee (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim q \vee \sim p \vee \sim p \vee q \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\sim q \vee q) \vee (\sim p \vee \sim p) \Leftrightarrow V \vee \sim p \Leftrightarrow V
 \end{aligned}$$

Logo,  $(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow V$ , sendo  $V$  uma qualquer proposição verdadeira. Portanto, para quaisquer que sejam as proposições  $p$  e  $q$ ,  $(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q)$  é sempre verdadeira, ou seja, é uma tautologia.

## 17.

17.1. Usando uma tabela de verdade:

$p$	$q$	$r$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$\underbrace{(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)}_a$	$p \wedge q$	$\underbrace{p \wedge q \Rightarrow r}_b$	$a \Rightarrow b$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$

Portanto, a proposição  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$  é uma tautologia, pois é sempre verdadeira para quaisquer que sejam a proposições,  $p$ ,  $q$  e  $r$ .

## 17.2.

a) Tem-se,  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \Leftrightarrow r \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ .

b) Tem-se,  $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

18. Podemos resolver o problema recorrendo a uma tabela de verdade:

$a$	$b$	$c$	$\neg c$	$a \vee b$	$b \vee c$	$a \wedge c$	$b \wedge \neg c$
$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$

Na tabela existe uma única linha onde as proposições  $a \vee b$  e  $b \vee c$  são verdadeiras e as proposições  $a \wedge c$  e  $b \wedge \neg c$  são falsas. Portanto, as proposições  $a \vee b$  e  $b \vee c$  são verdadeiras e as proposições  $a \wedge c$  e  $b \wedge \neg c$  são falsas e a proposição  $a$  é falsa e se as proposições  $b$  e  $c$  são verdadeiras.

Logo, o Pedro tem um carro preto e tem outro cinzento.

**19.** Tem-se:

- a proposição  $a$  é falsa, pois existem número primos que não são ímpares. O número 2 é primo e não é ímpar.
- a proposição  $b$  é verdadeira. Um trapézio é um quadrilátero com pelo menos dois lados paralelos. Logo, um quadrado é um trapézio.
- a proposição  $c$  é falsa, pois os números 3, 4 e 5 são inteiros consecutivos e são solução da equação  $x^2 + y^2 = z^2$ . De facto:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25, \text{ que é uma proposição verdadeira.}$$

**19.1.** A proposição  $c$  é falsa, consequentemente, a proposição  $\sim c$  é verdadeira. Logo, como a proposição  $b$  é verdadeira, vem que a proposição  $b \wedge \sim c$  é verdadeira.

Portanto, como a proposição  $a$  é falsa e a proposição  $b \wedge \sim c$  é verdadeira, a proposição  $a \vee (b \wedge \sim c)$  é verdadeira.

**19.2.** A proposição  $a$  é falsa e a proposição  $b$  é verdadeira. Logo, a proposição  $a \vee b$  é verdadeira. Como a proposição  $c$  é falsa, vem que a proposição  $b \wedge c$  é falsa.

Portanto, como a proposição  $a \vee b$  é verdadeira e a proposição  $b \wedge c$  é falsa, a proposição  $a \vee b \Rightarrow b \wedge c$  é falsa.

**19.3.** Como as proposições  $a$  e  $c$  o mesmo valor lógico (falso), a proposição  $a \Leftrightarrow c$  é verdadeira. Como a proposição  $a$  é falsa e a proposição  $b$  é verdadeira, a proposição  $a \vee b$  é verdadeira. A proposição  $\sim a$  é verdadeira, pois a proposição  $a$  é falsa. Logo, como as proposições  $\sim a$  e  $a \vee b$  são verdadeiras, a proposição  $\sim a \wedge (a \vee b)$  é verdadeira.

Portanto, como as proposições  $a \Leftrightarrow c$  e  $\sim a \wedge (a \vee b)$  são verdadeiras, a proposição  $(a \Leftrightarrow c) \Rightarrow (\sim a \wedge (a \vee b))$  é verdadeira.

**19.4.** A proposição  $\sim a$  é verdadeira, pois a proposição  $a$  é falsa e a proposição  $\sim b$  é falsa, pois a proposição  $b$  é verdadeira. Logo, a proposição  $\sim a \wedge \sim b$  é falsa. Como as proposições  $c$  e  $\sim a \wedge \sim b$  são falsas, a proposição  $\sim a \wedge \sim b \vee c$  é falsa.

Portanto, a proposição  $\sim (\sim a \wedge \sim b \vee c)$  é verdadeira, pois a proposição  $\sim a \wedge \sim b \vee c$  é falsa.

**19.5.** Como proposição  $a$  é falsa e a proposição  $b$  é verdadeira, a proposição  $a \vee b$  é verdadeira. A proposição  $\sim c$  é verdadeira, pois a proposição  $c$  é falsa.

Logo, como as proposições  $\sim c$  e  $a \vee b$  são verdadeiras, a proposição  $\sim c \Rightarrow a \vee b$  é verdadeira.

Como as proposições  $b$  e  $\sim c \Rightarrow a \vee b$  são verdadeiras, a proposição  $b \Leftrightarrow (\sim c \Rightarrow a \vee b)$  é verdadeira.

Por fim, a proposição  $\sim a$  é verdadeira, pois a proposição  $a$  é falsa. Portanto, como as proposições  $\sim a$  e  $b \Leftrightarrow (\sim c \Rightarrow a \vee b)$  são verdadeiras, a proposição  $\sim a \Rightarrow (b \Rightarrow (\sim c \Rightarrow a \vee b))$  é verdadeira.

**19.6.** Como proposição  $a$  é falsa e a proposição  $b$  é verdadeira, a proposição  $a \vee b$  é verdadeira. Como a proposição  $b$  é verdadeira e a proposição  $c$  é falsa, a proposição  $b \Rightarrow c$  é falsa.

Portanto, como a proposição  $a \vee b$  é verdadeira e a proposição  $b \Rightarrow c$  é falsa, a proposição  $(a \vee b) \wedge (b \Rightarrow c)$  é falsa.

20.

20.1.

$p$	$q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$

Como as colunas correspondentes às proposições  $p \Rightarrow q$  e  $\sim p \vee q$  são iguais, tem-se que, para quaisquer proposições  $p$  e  $q$ ,  $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ .

20.2.

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

Como as colunas correspondentes às proposições  $p \Rightarrow q$  e  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  são iguais, tem-se que, para quaisquer proposições  $p$  e  $q$ ,  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ .

20.3.

$p$	$q$	$r$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$\underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)}_a$	$a \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$

Portanto,  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$  é uma tautologia, pois é verdadeira para quaisquer proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$ .

20.4.

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

Como as colunas correspondentes às proposições  $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$  e  $p \wedge q$  são iguais, tem-se que, para quaisquer proposições  $p$  e  $q$ ,  $(p \vee q) \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q$ .

20.5.

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$V$

Portanto,  $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$  é uma tautologia, pois é verdadeira para quaisquer proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$ . Logo,  $(p \wedge q \Rightarrow p \vee q) \Leftrightarrow V$ , sendo  $V$  uma qualquer proposição verdadeira.

21.

21.1. Tem-se,  $\sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow F \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (\sim q \vee p) \Leftrightarrow \sim (q \Rightarrow p)$ .

21.2. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 & (\sim ((p \Rightarrow q) \vee p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim ((p \Rightarrow q) \vee p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim ((p \Rightarrow q) \vee p) \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim ((\sim p \vee q) \vee p) \vee q) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sim (\sim ((\sim p \vee p) \vee q) \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim (V \vee q) \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim V \vee q) \Leftrightarrow \sim (F \vee q) \Leftrightarrow \sim F \Leftrightarrow V
 \end{aligned}$$

21.3. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow \sim ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\sim (\sim p) \wedge \sim q) \vee (\sim (\sim q) \wedge \sim p) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)
 \end{aligned}$$

**21.4.** Tem-se:

$$\begin{aligned}
 (p \vee q \Rightarrow p \wedge q) &\Leftrightarrow \sim(p \vee q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee (p \wedge q)) \wedge (\sim q \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\sim p \vee (p \wedge q)) \wedge (\sim q \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q)) \wedge ((\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q)) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (V \wedge (\sim p \vee q)) \wedge ((\sim q \vee p) \wedge V) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)
 \end{aligned}$$

**21.5.** Tem-se,  $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee r \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

**21.6.** Tem-se:

$$\begin{aligned}
 (p \vee q) \wedge ((p \wedge r) \vee \sim q) &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge ((p \vee \sim q) \wedge (r \vee \sim q)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)) \wedge (r \vee \sim q) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (p \vee F) \wedge (r \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge (r \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \vee r) \Leftrightarrow p \wedge (q \Rightarrow r)
 \end{aligned}$$

**21.7.** Tem-se:

$$\begin{aligned}
 (p \wedge (p \vee q)) \wedge (p \vee (p \wedge q)) &\stackrel{D}{\Leftrightarrow} ((p \vee F) \wedge (p \vee q)) \wedge ((p \wedge V) \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow (p \vee (F \wedge q)) \wedge (p \wedge (V \vee q)) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (p \vee F) \wedge (p \wedge V) \Leftrightarrow p \wedge p \Leftrightarrow p
 \end{aligned}$$

i) Se  $p$  é uma proposição e  $F$  é uma qualquer proposição falsa então  $p \vee F \Leftrightarrow p$  (existência de elemento neutro da disjunção) e  $p \wedge V \Leftrightarrow p$  (existência de elemento neutro da conjunção).

**21.8.** Tem-se:

$$(p \vee (\sim p \wedge q)) \wedge (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)) \wedge (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (V \wedge (p \vee q)) \wedge \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \vee q) \Leftrightarrow F$$

**22.**

**22.1.** Esta proposição é do tipo “ $p$  a menos que  $q$ ”, onde  $p$ : “O Carlos não sai de casa quando está a chover” e  $q$ : “tenha aulas” que é o mesmo que “**se**  $\sim q$  **então**  $p$ ”. A proposição  $p$ : “O Carlos não sai de casa quando está a chover” pode ser reescrita da seguinte forma:

$p$ : “**Se** não estiver a chover, **então**, o Carlos não sai de casa”

Assim, tem-se que  $\sim q \Leftrightarrow \sim c$  e  $p \Leftrightarrow (a \Rightarrow \sim b)$ . Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica:  $\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)$ .

**Outra resolução:** A proposição pode ser interpretada da seguinte forma:

“**Se** o Carlos não tiver aulas **e** se estiver a chover, **então**, o Carlos não sai de casa”

Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica:  $(\sim c \wedge a) \Rightarrow \sim b$ .

As duas formas são equivalentes:  $(\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)) \Leftrightarrow c \vee (\sim a \vee \sim b) \Leftrightarrow (c \vee \sim a) \vee \sim b \Leftrightarrow (\sim (c \vee \sim a) \Rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (\sim c \wedge a) \Rightarrow \sim b$

**22.2.** A proposição  $X \vee Y$  pode ser traduzida em linguagem corrente como: **X ou Y**. A proposição  $X \Rightarrow Y$  pode ser traduzida em linguagem corrente como: **se X então Y** ou então, **Y quando X**. Assim, a proposição  $\sim a \vee c \Rightarrow b$  pode ser traduzida para linguagem corrente da seguinte forma:

“Se não estiver a chover ou se tiver aulas, então, o Carlos sai de casa.” ou “O Carlos sai de casa quando não está a chover ou quando tem aulas.”

**23.**

**23.1.**

**a)** Tem-se que  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ .

Como  $p \Rightarrow q$  é verdadeira, vem que  $\sim(p \wedge \sim q)$  também é verdadeira e consequentemente,  $p \wedge \sim q$  é falsa.

**b)** A proposição  $p \Rightarrow q$  é verdadeira. Logo, podem ocorrer três casos: as proposições  $p$  e  $q$  são ambas verdadeiras; as proposições  $p$  e  $q$  são ambas falsas; a proposição  $p$  é falsa e a proposição  $q$  é verdadeira.

**1.º Caso** - as proposições  $p$  e  $q$  são ambas verdadeiras:

Se a proposição  $q$  é verdadeira, então, a proposição  $r \wedge p \Rightarrow q$  é necessariamente **verdadeira**, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

**2.º Caso** - as proposições  $p$  e  $q$  são ambas falsas:

Se a proposição  $p$  é falsa, então, a proposição  $r \wedge p$  é falsa, pois a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, se a proposição  $r \wedge p$  é falsa, então, a proposição  $r \wedge p \Rightarrow q$  é **verdadeira**.

**3.º Caso** – a proposição  $p$  é falsa e a proposição  $q$  é verdadeira:

As justificações dadas nos 1.º e 2.º casos podem ser usadas para justificar que neste caso a proposição  $r \wedge p \Rightarrow q$  é **verdadeira**.

Portanto, a proposição  $r \wedge p \Rightarrow q$  é verdadeira.

**c)** A proposição  $p \Rightarrow q$  é verdadeira. Logo, podem ocorrer três casos referidos na alínea anterior:

**1.º Caso** - as proposições  $p$  e  $q$  são ambas verdadeiras:

Se a proposição  $q$  é verdadeira, então, a proposição  $r \Rightarrow q$  é necessariamente verdadeira, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Consequentemente, a proposição  $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$  é necessariamente **verdadeira**, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas.

**2.º Caso** - as proposições  $p$  e  $q$  são ambas falsas:

Se a proposição  $p$  é falsa, então, a proposição  $p \Rightarrow r$  é verdadeira, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Consequentemente, a proposição  $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$  é necessariamente **verdadeira**, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas.

**3.º Caso** – a proposição  $p$  é falsa e a proposição  $q$  é verdadeira:

As justificações dadas nos 1.º e 2.º casos podem ser usadas para justificar que neste caso a proposição  $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$  é **verdadeira**.

Portanto, a proposição  $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$  é verdadeira.

**23.2.** As proposições  $p \Rightarrow q$  e  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q \vee \sim r) \wedge r)$  são verdadeiras. Logo, a proposição  $(\sim q \vee \sim r) \wedge r$  é verdadeira. Assim:

- Como a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras, vem que as proposições  $\sim q \vee \sim r$  e  $r$  são verdadeiras.
  - A proposição  $\sim r$  é falsa, visto que a proposição  $r$  é verdadeira. Como a proposição  $\sim q \vee \sim r$  é verdadeira e como a disjunção de duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas, conclui-se que a proposição  $\sim q$  é verdadeira e consequentemente a proposição  $q$  é falsa.
  - Como a proposição  $p \Rightarrow q$  é verdadeira e como a proposição  $q$  é falsa, vem que a proposição  $p$  é falsa.
- ∴ A proposição  $p$  é falsa, a proposição  $q$  é falsa e a proposição  $r$  é verdadeira.

**23.3.** Tem-se que:

$$(p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p))) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q \vee \sim p)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (r \vee \sim q \vee \sim p)) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee r \vee \sim q \Leftrightarrow \sim p \vee r \vee \sim q$$

Como  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$  e como a proposição  $p \Rightarrow q$  é verdadeira, vem que a proposição  $\sim(p \wedge \sim q)$  é verdadeira e consequentemente, a proposição  $p \wedge \sim q$  é falsa. Portanto, a proposição  $\sim p \vee r \vee \sim q$  é falsa.

A disjunção entre duas ou mais proposições é falsa se e somente se todas as proposições forem falsas. Logo, as proposições  $\sim p$ ,  $\sim q$  e  $r$  são falsas. Consequentemente as proposições  $p$  e  $q$  são verdadeiras.

∴ A proposição  $p$  é verdadeira, a proposição  $q$  é verdadeira e a proposição  $r$  é falsa.

**24.** Podemos resolver o problema recorrendo a uma tabela de verdade:

$p$	$q$	$r$	$\sim r$	$p \Leftrightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$r \Rightarrow p \wedge q$	$\sim r \wedge (p \vee q)$	$\sim(\sim r \wedge (p \vee q))$
V	V	V	F	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
V	F	V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F	V	V	F

Analisando a tabela verifica-se que sempre que a proposição  $p \Leftrightarrow q$  é falsa e que a proposição  $r \Rightarrow p \wedge q$  é verdadeira, a proposição  $\sim(\sim r \wedge (p \vee q))$  é falsa.

∴ A proposição  $\sim(\sim r \wedge (p \vee q))$  é falsa.

25.

**25.1.** A proposição  $(p \wedge \sim r) \vee (p \Rightarrow \sim q)$  é falsa. Logo, como a disjunção de duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas, vem que as proposições  $p \wedge \sim r$  e  $p \Rightarrow \sim q$  são falsas. Assim:

- como a proposição  $p \Rightarrow \sim q$  é falsa, vem que a proposição  $p$  é verdadeira e a proposição  $\sim q$  é falsa, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Consequentemente, a proposição  $q$  é verdadeira.
  - como a proposição  $p \wedge \sim r$  é falsa e a proposição  $p$  é verdadeira, vem que a proposição  $\sim r$  é falsa, pois a disjunção entre duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Consequentemente a proposição  $r$  é verdadeira.
- ∴ As proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$  são verdadeiras.

**25.2.** A proposição  $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  é falsa. Logo, como a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa, vem que a proposição  $\sim p$  é verdadeira e a proposição  $q \Rightarrow r$  é falsa. Consequentemente, a proposição  $p$  é falsa. Da mesma forma, como a proposição  $q \Rightarrow r$  é falsa, conclui-se que a proposição  $q$  é verdadeira e a proposição  $r$  é falsa.

∴ A proposição  $p$  é falsa, a proposição  $q$  é verdadeira e a proposição  $r$  é falsa.

**25.3.** A proposição  $(\sim p \Rightarrow r) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p) \wedge \sim r$  é verdadeira. Logo, como a conjunção de duas ou mais proposições é verdadeira se e somente se todas forem verdadeiras, vem que as proposições  $\sim p \Rightarrow r$ ,  $\sim q \Leftrightarrow p$  e  $\sim r$  são verdadeiras. Assim:

- a proposição  $\sim r$  é verdadeira, consequentemente a proposição  $r$  é falsa.
- como a proposição  $\sim p \Rightarrow r$  é verdadeira e a proposição  $r$  é falsa, vem que a proposição  $\sim p$  é falsa, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Consequentemente, a proposição  $p$  é verdadeira.
- como a proposição  $\sim q \Leftrightarrow p$  é verdadeira, vem que as proposições  $p$  e  $\sim q$  têm o mesmo valor lógico. Como a proposição  $p$  é verdadeira, conclui-se que a proposição  $\sim q$  é também verdadeira. Logo, a proposição  $q$  é falsa.

∴ A proposição  $p$  é verdadeira, a proposição  $q$  é falsa e a proposição  $r$  é falsa.

**Nota:** o exercício 25. poderia ter sido resolvido recorrendo a tabelas de verdade, a exemplo do que se fez no item 24. Para o item 25.3. ficaria:

$p$	$q$	$r$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$\sim p \Rightarrow r$	$\sim q \Leftrightarrow p$	$(\sim p \Rightarrow r) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p) \wedge \sim r$
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	F	F

Analizando a tabela verifica-se a proposição  $(\sim p \Rightarrow r) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p) \wedge \sim r$  é verdadeira se e somente se proposição  $p$  é verdadeira, a proposição  $q$  é falsa e a proposição  $r$  é falsa.

José Carlos da Silva Pereira