



## FICHA DE TRABALHO N.º 1 – MATEMÁTICA A – 10.º ANO

## INTRODUÇÃO À LÓGICA BIVALENTE

“Conhece a Matemática e dominarás o Mundo.”  
Galileu Galilei

## GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições com o mesmo valor lógico. Qual das seguintes proposições é falsa?

A  $p \Leftrightarrow q$

B  $p \Rightarrow q$

C  $p \vee \sim q$

D  $p \wedge \sim q$

Resolução em vídeo pelo professor Jorge Penalva do canal do Youtube “O Mocho”: <https://youtu.be/TQoHMKWhJWc>

2. Considere as seguintes proposições:

$p$ : A Maria tem uma licenciatura em Matemática

$q$ : A Maria tem um mestrado em Física

$r$ : A Maria é professora Matemática

Sabe-se que a proposição  $q \Leftrightarrow p$  é verdadeira e que a proposição  $\sim p \vee r$  é falsa.

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

A Se a Maria é licenciada em Matemática e tem um mestrado em Física então é professora de Matemática.

B A Maria tem uma licenciatura em Matemática e não tem um mestrado em Física.

C A Maria é licenciada em Matemática se for professora de Matemática.

D A Maria não tem um mestrado em Física ou é professora de Matemática

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/Ko9FOUJT6VQ>

3. Considere as proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$  tais que a proposição  $p \Rightarrow q \vee \sim r$  é falsa.

Qual é, respectivamente, o valor lógico das proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$ ?

A  $V, V \text{ e } V$

B  $V, F \text{ e } V$

C  $V, F \text{ e } F$

D  $F, F \text{ e } V$

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/fbFJQUHie8o>

4. Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições.

Qual das proposições é equivalente à negação da proposição  $((p \vee p) \wedge \sim q) \Rightarrow q$ ?

**A**  $p \wedge \sim q$

**B**  $\sim p \vee q$

**C**  $\sim p \wedge q$

**D**  $p \vee \sim q$

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/G71wtYbh2VM>

5. Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. A proposição  $p \wedge (q \Rightarrow p)$  é equivalente a:

**A**  $p$

**B**  $q$

**C**  $\sim p$

**D**  $\sim q$

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/gCp2MzgKid0>

6. Considere as proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$  tais que a proposição  $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$  é verdadeira.

Qual é, respectivamente, o valor lógico das proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$ ?

**A**  $F, V \text{ e } V$

**B**  $F, F \text{ e } V$

**C**  $V, F \text{ e } F$

**D**  $F, F \text{ e } F$

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/3Zk6QbJvjXw>

7. Considere as seguintes proposições:

*a*: A Joana tem um gato de cor branca

*b*: A Joana tem um gato de cor preta

*c*: A Joana tem um gato tricolor

Sabe-se que a proposição  $(\sim a \wedge (b \Rightarrow c)) \vee a$  é falsa.

A Joana tem um gato:

**A** de cor branca.

**B** tricolor.

**C** de cor preta.

**D** nem branco, nem preto, nem tricolor.

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/xUjyZym0jxl>

8. Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  três proposições. Qual das seguintes proposições não é uma tautologia?

**A**  $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

**B**  $((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$

**C**  $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$

**D**  $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$

9. Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições e  $r$  uma proposição que depende de  $p$  e  $q$ . Na figura está representada parte da tabela de verdade da proposição  $r$ .

A proposição  $r$  pode ser:

**A**  $p \wedge \sim q \Rightarrow p$

**B**  $p \Rightarrow p \wedge \sim q$

**C**  $p \Rightarrow p \vee \sim q$

**D**  $p \vee \sim q \Rightarrow p$

$p$	$q$	$r$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

10. Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. A proposição  $p \Leftrightarrow p \vee q$  é equivalente a:

**A**  $\sim(\sim p \vee q)$

**B**  $\sim(p \wedge \sim q)$

**C**  $\sim(p \vee \sim q)$

**D**  $\sim(\sim p \wedge q)$

Resolução em vídeo: [https://youtu.be/J1YhGrDK\\_WA](https://youtu.be/J1YhGrDK_WA)

#### GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

11. Considere as seguintes proposições:

$p$ : O José já fez uma viagem à China

$q$ : O José já fez uma viagem aos Estados Unidos

$r$ : O José já fez uma viagem à Tailândia

11.1. Traduza para linguagem simbólica a seguinte proposição:

“O José ainda não fez uma viagem aos Estados Unidos, mas já fez uma viagem à China se também já fez uma viagem à Tailândia.”

11.2. Sabendo que a proposição  $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim(p \vee r)$  é falsa, em qual, ou em quais, destes países já esteve o José?

11.3. Usando as propriedades das operações lógicas, mostre que  $((\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim(p \vee r)) \Leftrightarrow p \vee \sim q \vee \sim r$ .

**12.** Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições.

**12.1.** Usando as propriedades das operações lógicas, mostre que  $(\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow p$ .

**12.2.** Construa a tabela de verdade da proposição  $\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$  e confirme a equivalência enunciada na alínea anterior.

**13.** Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  três proposições.

**13.1.** Construa a tabela de verdade da proposição  $p \wedge (\sim q \vee r)$ .

**13.2.** Suponha que a proposição  $p \wedge (\sim q \vee r)$  é verdadeira. Qual é o valor lógico da proposição:

$$(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim r \wedge q)$$

**14.** Considere as seguintes proposições:

$p$ : «o José passou as suas férias no Algarve»

$q$ : «o José foi à Praia da Rocha»

$r$ : «o José foi à Praia da Ilha de Tavira»

**14.1.** Traduza para linguagem corrente a seguinte proposição:  $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \sim r)$ .

**14.2.** Escreva simbolicamente a seguinte afirmação:

“O José foi à Praia da Rocha e à Praia da Ilha de Tavira no caso de ter passado férias no Algarve.”

**15.** Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. Simplifique a seguintes proposições e indique sempre que possível o respectivo valor lógico.

**15.1.**  $(p \vee (p \wedge q)) \Rightarrow p$

**15.2.**  $\sim(\sim p \wedge (p \vee q)) \wedge (p \vee q)$

**15.3.**  $p \Rightarrow (p \Rightarrow p \wedge q)$

**15.4.**  $(p \Rightarrow (p \wedge \sim q)) \wedge (\sim p \vee q)$

**15.5.**  $\sim((p \Rightarrow \sim q) \vee (p \wedge q))$

**15.6.**  $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

**15.7.**  $q \Rightarrow (\sim(p \Rightarrow \sim q) \wedge q)$

**15.8.**  $(p \wedge \sim(p \wedge q)) \Rightarrow \sim p \vee q$

**16.** Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. Mostre que o valor lógico de  $(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q)$  não depende do valor lógico das proposições  $p$  e  $q$ , usando:

**16.1.** uma tabela de verdade.

**16.2.** as propriedades das operações lógicas.

**17.** Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  três proposições.

**17.1.** Mostre que a proposição  $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$  é uma tautologia.

**17.2.** Usando as propriedades das operações lógicas, mostre que:

**a)**  $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ .

**b)**  $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$ .

**18.** Considere as seguintes proposições:

$a$ : O Pedro tem um carro branco

$b$ : O Pedro tem um carro preto

$c$ : O Pedro tem um carro cinzento

Sabe-se que as proposições  $a \vee b$  e  $b \vee c$  são verdadeiras e que  $a \wedge c$  e  $b \wedge \sim c$  são falsas.

É possível concluir se o Pedro tem algum carro? Se sim, de que cor é (são)?

**19.** Considere as seguintes proposições:

$a$ : Todos os números primos são ímpares

$b$ : Todos os quadrados são trapézios

$c$ : A equação  $x^2 + y^2 = z^2$  não tem soluções em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  sejam números inteiros consecutivos.

Indique o valor lógico das seguintes proposições:

**19.1.**  $a \vee (b \wedge \sim c)$

**19.2.**  $a \vee b \Rightarrow b \wedge c$

**19.3.**  $(a \Leftrightarrow c) \Rightarrow (\sim a \wedge (a \vee b))$

**19.4.**  $\sim (\sim a \wedge \sim b \vee c)$

**19.5.**  $\sim a \Rightarrow (\sim c \Rightarrow a \vee b)$

**19.6.**  $(a \vee b) \wedge (b \Rightarrow c)$

**20.** Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  três proposições e  $V$  uma qualquer proposição verdadeira. Usando tabelas de verdade, mostre que:

**20.1.**  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

**20.2.**  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

**20.3.**  $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

**20.4.**  $((p \vee q) \wedge (p \wedge q)) \Leftrightarrow p \wedge q$

**20.5.**  $(p \wedge q \Rightarrow p \vee q) \Leftrightarrow V$

**21.** Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  três proposições,  $V$  uma qualquer proposição verdadeira e  $F$  uma qualquer proposição falsa. Usando as propriedades das operações lógicas, mostre que:

**21.1.**  $\sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow \sim (q \Rightarrow p)$

**21.2.**  $(\sim ((p \Rightarrow q) \vee p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$

**21.3.**  $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q))$

**21.4.**  $(p \vee q \Rightarrow p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

**21.5.**  $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

**21.6.**  $((p \vee q) \wedge ((p \wedge r) \vee \sim q)) \Leftrightarrow (p \wedge (q \Rightarrow r))$

**21.7.**  $(p \wedge (p \vee q)) \wedge (p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$

**21.8.**  $(p \vee (\sim p \wedge q)) \wedge (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow F$

**22.** Considere as seguintes proposições:

*a:* Está a chover

*b:* O Carlos sai de casa

*c:* O Carlos tem aulas

**22.1.** Escreva a seguinte proposição em linguagem simbólica:

“O Carlos não sai de casa quando está a chover, a menos que tenha aulas.”

**22.2.** Traduza para linguagem corrente a seguinte proposição:  $\sim a \vee c \Rightarrow b$ .

Adaptado do Caderno de Apoio do 10.º Ano – Matemática A

**23.** Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  três proposições tais que a proposição  $p \Rightarrow q$  é verdadeira.

**23.1.** Qual é o valor lógico das seguintes proposições:

a)  $p \wedge \sim q$

b)  $r \wedge p \Rightarrow q$

c)  $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$

**23.2.** Supondo que a proposição  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q \vee \sim r) \wedge r)$  é verdadeira, quais são os valores lógicos de  $p$ ,  $q$  e  $r$ ?

**23.3.** Supondo que  $p \wedge \sim q \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)))$  é verdadeira, quais são os valores lógicos de  $p$ ,  $q$  e  $r$ ?

**24.** Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  três proposições tais que a proposição  $p \Leftrightarrow q$  é falsa e a proposição  $r \Rightarrow p \wedge q$  é verdadeira.

Qual é o valor lógico da proposição  $\sim (\sim r \wedge (p \vee q))$ ?

**25.** Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  três proposições. Determine os valores lógicos de  $p$ ,  $q$  e  $r$  sabendo que:

**25.1.** a proposição  $(p \wedge \sim r) \vee (p \Rightarrow \sim q)$  é falsa.

**25.2.** a proposição  $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  é falsa.

**25.3.** a proposição  $(\sim p \Rightarrow r) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p) \wedge \sim r$  é verdadeira.

## SOLUCIONÁRIO

## GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. D

2. C

3. B

4. A

5. A

6. D

7. C

8. C

9. B

10. D

## GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

11.1.  $\sim q \wedge (r \Rightarrow p)$ 

11.2. O José já esteve nos Estados Unidos e na Tailândia.

12.2.

$p$	$q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F

13.1.

$p$	$q$	$r$	$\sim q$	$\sim q \vee r$	$p \wedge (\sim q \vee r)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F

13.2. F

14.1. Se o José passou as suas férias no Algarve, então, foi à Praia da Rocha se e somente se não foi à Praia da Ilha de Tavira.

14.2.  $p \Rightarrow q \wedge r$ 

15.1. V

15.2.  $p$ 15.3.  $\sim p \vee q$ 15.4.  $\sim p$ 

15.5. F

15.6.  $p \vee q$ 15.7.  $p \vee \sim q$ 15.8.  $\sim p \vee q$ 

16.1.

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$q \wedge (p \vee \sim q)$	$\sim p \vee q$	$(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V

17.1.

$p$	$q$	$r$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$\underbrace{(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)}_a$	$p \wedge q$	$\underbrace{p \wedge q \Rightarrow r}_b$	$a \Rightarrow b$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$

Portanto, a proposição  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$  é uma tautologia, pois é sempre verdadeira para quaisquer que sejam a proposições,  $p$ ,  $q$  e  $r$ .

18. Podemos resolver o problema recorrendo a uma tabela de verdade:

$a$	$b$	$c$	$\sim c$	$a \vee b$	$b \vee c$	$a \wedge c$	$\cancel{b \wedge \sim c}$
$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$

O Pedro tem um carro preto e outro cinzento.

19.1.  $V$ 19.5.  $V$ 19.2.  $F$ 19.6.  $F$ 19.3.  $V$ 19.4.  $V$ 

20.1.

$p$	$q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$

Portanto,  $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

20.2.

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

Portanto,  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ 

20.3.

$p$	$q$	$r$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$\underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)}_a$	$a \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$

Portanto,  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$ 

20.4.

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

Portanto,  $(p \vee q) \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q$ 

20.5.

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$V$

Portanto,  $(p \wedge q) \Rightarrow p \vee q \Leftrightarrow V$ 

22.1.

 $\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)$  ou  $(\sim c \wedge a) \Rightarrow \sim b$ 

22.2. O Carlos sai de casa quando não está a chover ou quando tem aulas.

23.1.

a)  $E$       b)  $V$       c)  $V$ 23.1. c)  $V$ 23.2.  $F, F \in V$ 

23.3.

 $V, V \in F$ 

24.

 $F$ 25.1.  $V, V \in V$ 25.2.  $F, V \in F$ 25.3.  $V, F \in F$