

**FICHA DE TRABALHO N.º 1 – MATEMÁTICA A – 10.º ANO****INTRODUÇÃO À LÓGICA BIVALENTE**

*"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei*

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Sejam p e q duas proposições com o mesmo valor lógico. Qual das seguintes proposições é falsa?

A $p \Leftrightarrow q$

B $p \Rightarrow q$

C $p \vee \sim q$

D $p \wedge \sim q$

Resolução em vídeo pelo professor Jorge Penalva do canal do Youtube "O Mocho": <https://youtu.be/TQoHMkWhJWc>

2. Considere as seguintes proposições:

p : A Maria tem uma licenciatura em Matemática

q : A Maria tem um mestrado em Física

r : A Maria é professora Matemática

Sabe-se que a proposição $q \Leftrightarrow p$ é verdadeira e que a proposição $\sim p \vee r$ é falsa.

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

A Se a Maria é licenciada em Matemática e tem um mestrado em Física então é professora de Matemática.

B A Maria tem uma licenciatura em Matemática e não tem um mestrado em Física.

C A Maria é licenciada em Matemática se for professora de Matemática.

D A Maria não tem um mestrado em Física ou é professora de Matemática

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/Ko9FOUJT6VQ>

3. Considere as proposições p , q e r tais que a proposição $p \Rightarrow q \vee \sim r$ é falsa.

Qual é, respectivamente, o valor lógico das proposições p , q e r ?

A $V, V \text{ e } V$

B $V, F \text{ e } V$

C $V, F \text{ e } F$

D $F, F \text{ e } V$

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/fbFJQUHie8o>

4. Sejam p e q duas proposições.

Qual das proposições é equivalente à negação da proposição $((p \vee p) \wedge \sim q) \Rightarrow q$?

A $p \wedge \sim q$

B $\sim p \vee q$

C $\sim p \wedge q$

D $p \vee \sim q$

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/G71wtYbh2VM>

5. Sejam p e q duas proposições. A proposição $p \wedge (q \Rightarrow p)$ é equivalente a:

A p

B q

C $\sim p$

D $\sim q$

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/gCp2MzgKid0>

6. Considere as proposições p , q e r tais que a proposição $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$ é verdadeira.

Qual é, respectivamente, o valor lógico das proposições p , q e r ?

A F, V e V

B F, F e V

C V, F e F

D F, F e F

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/3Zk6QbJvXw>

7. Considere as seguintes proposições:

a : A Joana tem um gato de cor branca

b : A Joana tem um gato de cor preta

c : A Joana tem um gato tricolor

Sabe-se que a proposição $(\sim a \wedge (b \Rightarrow c)) \vee a$ é falsa.

A Joana tem um gato:

A de cor branca.

B tricolor.

C de cor preta.

D nem branco, nem preto, nem tricolor.

Resolução em vídeo: <https://youtu.be/xUyZym0jxl>

8. Sejam p , q e r três proposições. Qual das seguintes proposições não é uma tautologia?

A $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

B $((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$

C $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$

D $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$

9. Sejam p e q duas proposições e r uma proposição que depende de p e q . Na figura está representada parte da tabela de verdade da proposição r .

A proposição r pode ser:

A $p \wedge \sim q \Rightarrow p$

B $p \Rightarrow p \wedge \sim q$

C $p \Rightarrow p \vee \sim q$

D $p \vee \sim q \Rightarrow p$

p	q	r
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

10. Sejam p e q duas proposições. A proposição $p \Leftrightarrow p \vee q$ é equivalente a:

A $\sim(\sim p \vee q)$

B $\sim(p \wedge \sim q)$

C $\sim(p \vee \sim q)$

D $\sim(\sim p \wedge q)$

Resolução em vídeo: https://youtu.be/J1YhGrDK_WA

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

11. Considere as seguintes proposições:

p : O José já fez uma viagem à China

q : O José já fez uma viagem aos Estados Unidos

r : O José já fez uma viagem à Tailândia

11.1. Traduza para linguagem simbólica a seguinte proposição:

“O José ainda não fez uma viagem aos Estados Unidos, mas já fez uma viagem à China se também já fez uma viagem à Tailândia.”

11.2. Sabendo que a proposição $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim(p \vee r)$ é falsa, em qual, ou em quais, destes países já esteve o José?

11.3. Usando as propriedades das operações lógicas, mostre que $((\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim(p \vee r)) \Leftrightarrow p \vee \sim q \vee \sim r$.

12. Sejam p e q duas proposições.

12.1. Usando as propriedades das operações lógicas, mostre que $(\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow p$.

12.2. Construa a tabela de verdade da proposição $\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$ e confirme a equivalência enunciada na alínea anterior.

13. Sejam p , q e r três proposições.

13.1. Construa a tabela de verdade da proposição $p \wedge (\sim q \vee r)$.

13.2. Suponha que a proposição $p \wedge (\sim q \vee r)$ é verdadeira. Qual é o valor lógico da proposição:

$$(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim r \wedge q)$$

14. Considere as seguintes proposições:

p : «o José passou as suas férias no Algarve»

q : «o José foi à Praia da Rocha»

r : «o José foi à Praia da Ilha de Tavira»

14.1. Traduza para linguagem corrente a seguinte proposição: $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \sim r)$.

14.2. Escreva simbolicamente a seguinte afirmação:

“O José foi à Praia da Rocha e à Praia da Ilha de Tavira no caso de ter passado férias no Algarve.”

15. Sejam p e q duas proposições. Simplifique as seguintes proposições e indique sempre que possível o respectivo valor lógico.

15.1. $(p \vee (p \wedge q)) \Rightarrow p$

15.2. $\sim(\sim p \wedge (p \vee q)) \wedge (p \vee q)$

15.3. $p \Rightarrow (p \Rightarrow p \wedge q)$

15.4. $(p \Rightarrow (p \wedge \sim q)) \wedge (\sim p \vee q)$

15.5. $\sim((p \Rightarrow \sim q) \vee (p \wedge q))$

15.6. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

15.7. $q \Rightarrow (\sim(p \Rightarrow \sim q) \wedge q)$

15.8. $(p \wedge \sim(p \wedge q)) \Rightarrow \sim p \vee q$

16. Sejam p e q duas proposições. Mostre que o valor lógico de $(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ não depende do valor lógico das proposições p e q , usando:

16.1. uma tabela de verdade.

16.2. as propriedades das operações lógicas.

17. Sejam p , q e r três proposições.

17.1. Mostre que a proposição $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ é uma tautologia.

17.2. Usando as propriedades das operações lógicas, mostre que:

a) $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r).$

b) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r).$

18. Considere as seguintes proposições:

a : O Pedro tem um carro branco

b : O Pedro tem um carro preto

c : O Pedro tem um carro cinzento

Sabe-se que as proposições $a \vee b$ e $b \vee c$ são verdadeiras e que $a \wedge c$ e $b \wedge \sim c$ são falsas.

É possível concluir se o Pedro tem algum carro? Se sim, de que cor é (são)?

19. Considere as seguintes proposições:

a : Todos os números primos são ímpares

b : Todos os quadrados são trapézios

c : A equação $x^2 + y^2 = z^2$ não tem soluções em que x , y e z sejam números inteiros consecutivos.

Indique o valor lógico das seguintes proposições:

19.1. $a \vee (b \wedge \sim c)$

19.2. $a \vee b \Rightarrow b \wedge c$

19.3. $(a \Leftrightarrow c) \Rightarrow (\sim a \wedge (a \vee b))$

19.4. $\sim(\sim a \wedge \sim b \vee c)$

$$19.5. \sim a \Rightarrow (b \Rightarrow (\sim c \Rightarrow a \vee b))$$

$$19.6. (a \vee b) \wedge (b \Rightarrow c)$$

20. Sejam p , q e r três proposições e V uma qualquer proposição verdadeira. Usando tabelas de verdade, mostre que:

$$20.1. (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$20.2. (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

$$20.3. ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$20.4. ((p \vee q) \wedge (p \wedge q)) \Leftrightarrow p \wedge q$$

$$20.5. (p \wedge q \Rightarrow p \vee q) \Leftrightarrow V$$

21. Sejam p , q e r três proposições, V uma qualquer proposição verdadeira e F uma qualquer proposição falsa. Usando as propriedades das operações lógicas, mostre que:

$$21.1. \sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow \sim (q \Rightarrow p)$$

$$21.2. (\sim ((p \Rightarrow q) \vee p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$$

$$21.3. \sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q))$$

$$21.4. (p \vee q \Rightarrow p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$$

$$21.5. (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

$$21.6. ((p \vee q) \wedge ((p \wedge r) \vee \sim q)) \Leftrightarrow (p \wedge (q \Rightarrow r))$$

$$21.7. (p \wedge (p \vee q)) \wedge (p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$$

$$21.8. (p \vee (\sim p \wedge q)) \wedge (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow F$$

22. Considere as seguintes proposições:

a : Está a chover

b : O Carlos sai de casa

c : O Carlos tem aulas

22.1. Escreva a seguinte proposição em linguagem simbólica:

“O Carlos não sai de casa quando está a chover, a menos que tenha aulas.”

22.2. Traduza para linguagem corrente a seguinte proposição: $\sim a \vee c \Rightarrow b$.

23. Sejam p , q e r três proposições tais que a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira.

23.1. Qual é o valor lógico das seguintes proposições:

a) $p \wedge \sim q$

b) $r \wedge p \Rightarrow q$

c) $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$

23.2. Supondo que a proposição $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q \vee \sim r) \wedge r)$ é verdadeira, quais são os valores lógicos de p , q e r ?

23.3. Supondo que $p \wedge \sim q \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)))$ é verdadeira, quais são os valores lógicos de p , q e r ?

24. Sejam p , q e r três proposições tais que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é falsa e a proposição $r \Rightarrow p \wedge q$ é verdadeira.

Qual é o valor lógico da proposição $\sim(\sim r \wedge (p \vee q))$?

25. Sejam p , q e r três proposições. Determine os valores lógicos de p , q e r sabendo que:

25.1. a proposição $(p \wedge \sim r) \vee (p \Rightarrow \sim q)$ é falsa.

25.2. a proposição $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa.

25.3. a proposição $(\sim p \Rightarrow r) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p) \wedge \sim r$ é verdadeira.

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. D 2. C 3. B 4. A 5. A
6. D 7. C 8. C 9. B 10. D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

11.1. $\sim q \wedge (r \Rightarrow p)$

11.2. O José já esteve nos Estados Unidos e na Tailândia.

12.2.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F

13.1.

p	q	r	$\sim q$	$\sim q \vee r$	$p \wedge (\sim q \vee r)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F

13.2 F

14.1. Se o José passou as suas férias no Algarve, então, foi à Praia da Rocha se e somente se não foi à Praia da Ilha de Tavira.

14.2. $p \Rightarrow q \wedge r$

15.1. V

15.2. p 15.3. $\sim p \vee q$ 15.4. $\sim p$

15.5. F

15.6. $p \vee q$ 15.7. $p \vee \sim q$ 15.8. $\sim p \vee q$

16.1.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$q \wedge (p \vee \sim q)$	$\sim p \vee q$	$(q \wedge (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V

17.1.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$\underbrace{(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)}_a$	$p \wedge q$	$\underbrace{p \wedge q \Rightarrow r}_b$	$a \Rightarrow b$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V

Portanto, a proposição $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ é uma tautologia, pois é sempre verdadeira para quaisquer que sejam as proposições, p , q e r .

18. Podemos resolver o problema recorrendo a uma tabela de verdade:

a	b	c	$\sim c$	$a \vee b$	$b \vee c$	$a \wedge c$	$b \wedge \sim c$
V	V	V	F	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F

O Pedro tem um carro preto e outro cinzento.

19.1. V

19.2. F

19.3. V

19.4. V

19.5. V

19.6. F

20.1.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Portanto, $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

20.2.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Portanto, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

20.3.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$\underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)}_a$	$a \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Portanto, $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$

20.4.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	F

Portanto, $(p \vee q) \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q$

20.5.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Portanto, $(p \wedge q \Rightarrow p \vee q) \Leftrightarrow V$ 22.1. $\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)$ ou $(\sim c \wedge a) \Rightarrow \sim b$

22.2. O Carlos sai de casa quando não está a chover ou quando tem aulas.

23.1. a) F

23.1. b) V

23.1. c) V

23.2. F, F e V

23.3. V, V e F

24. F

25.1. V, V e V

25.2. F, V e F

25.3. V, F e F